Aufgabe: Mohrscher Spannungskreis

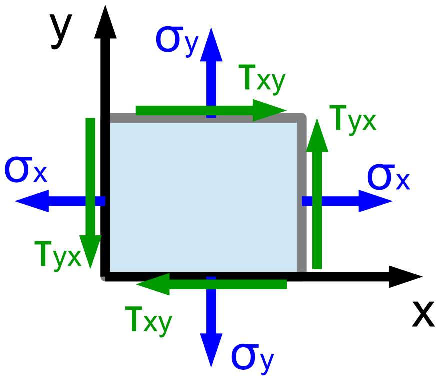
Gegeben seien die folgenden Spannungen:

$\boldsymbol{\sigma_x = -40}$ **MPa**, $\boldsymbol{\sigma_y = 60}$ **MPa** und $\boldsymbol{\tau_{xy} = -15}$ **MPa**.

Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis und bestimmen Sie

(1) die Hauptspannungen $\boldsymbol{\sigma_1}$ und $\boldsymbol{\sigma_2}$,
(2) die Hauptrichtungen zeichnerisch,
(3) die Hauptschubspannung und die dazugehörige Hauptrichtung,
(4) die Normalspannung und Schubspannung in einem Drehwinkel von 20° zur x-Achse.

Formeln zur Überprüfung:



Spannungszustand für positive Spannungen

Bestimmung der Spannungen bei einer des Koordinatensystems um einen Winkel α **:**

$$\sigma_x{*}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\alpha)+\tau_{xy}\sin(2\alpha)$$

$$\sigma_y{*}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{-\sigma_x+\sigma_y}{2}\cos(2\alpha)-\tau_{xy}\sin(2\alpha)$$

$$\tau_{xy}{*}=\tau_{yx}{*}=\frac{-\sigma_x+\sigma_y}{2}\sin(2\alpha)+\tau_{xy}\cos(2\alpha)$$

α positiv für Linksdrehung und negativ für Rechtsdrehung

Berechnung der Hauptspannungen:

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

Berechnung der Hauptrichtung (Hauptnormalspannungen):

$$\tan(2\alpha{*})=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

Berechnung der Hauptschubspannung:

$$\tau_{1,2}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

ingenieurkurse.de
Interaktive Online-Kurse

Berechnung der Hauptrichtung (Hauptschubspannung):

$$\tan(2\alpha^{**}) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

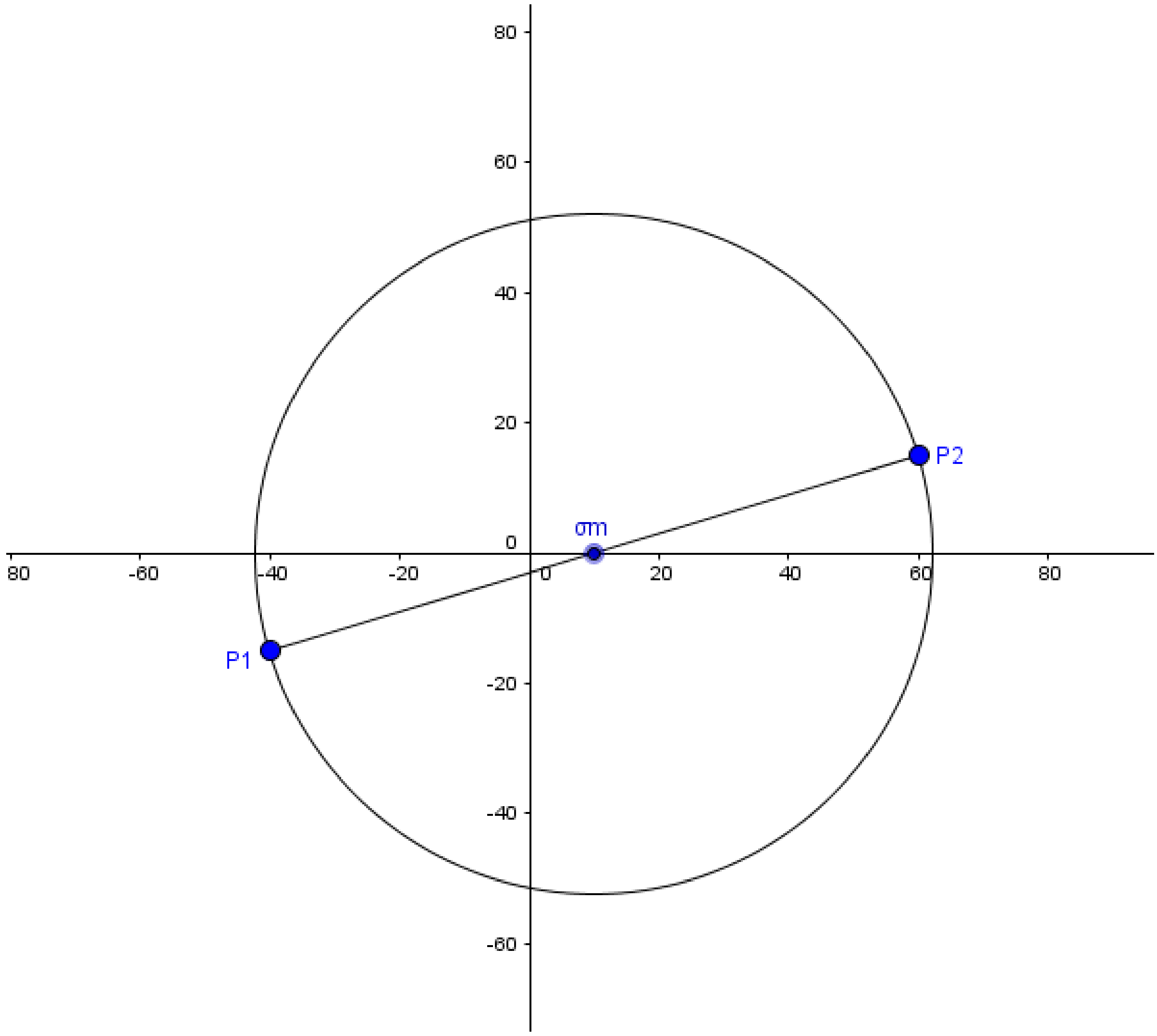
Berechnung der mittleren Normalspannung:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Lösung:

Zeichnung des Mohrschen Spannungskreises:

P1(σ_x|τ_{xy}) und P2(σ_y|-τ_{xy})
P1(-40|-15) und P2(60|15)



σ_m liegt dann auf auf dem Schnittpunkt zwischen der σ-Achse und der Verbindungslinie.

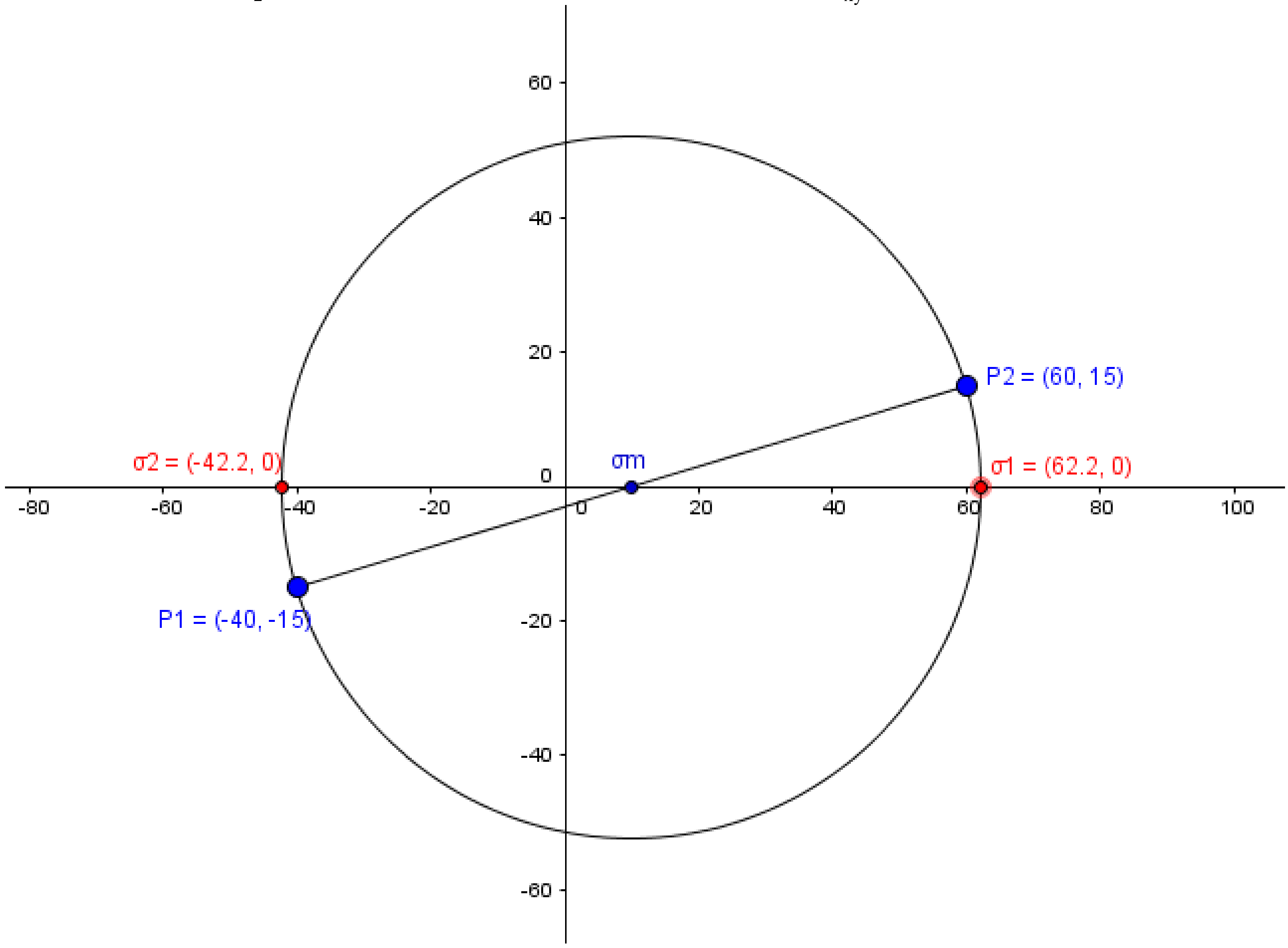
$\sigma_m(10|0)$

Rechnerische Probe:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-40+60}{2} = 10$$

1) Bestimmung der Hauptspannungen

Die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 befinden sich auf dem äußersten Rand des Kreises auf der σ-Achse. Dort nehmen die Normalspannungen ihre Extremwerte an! Es gilt immer: $\sigma_1 > \sigma_2$, d.h. dass σ_1 immer rechts von σ_2 liegt. Die Schubspannungen sind dort Null: $\tau_{xy} = 0$.



Ablesen der Werte:

$\sigma_1 = 62{,}2$

$\sigma_2 = -42{,}2$

Rechnerische Probe:

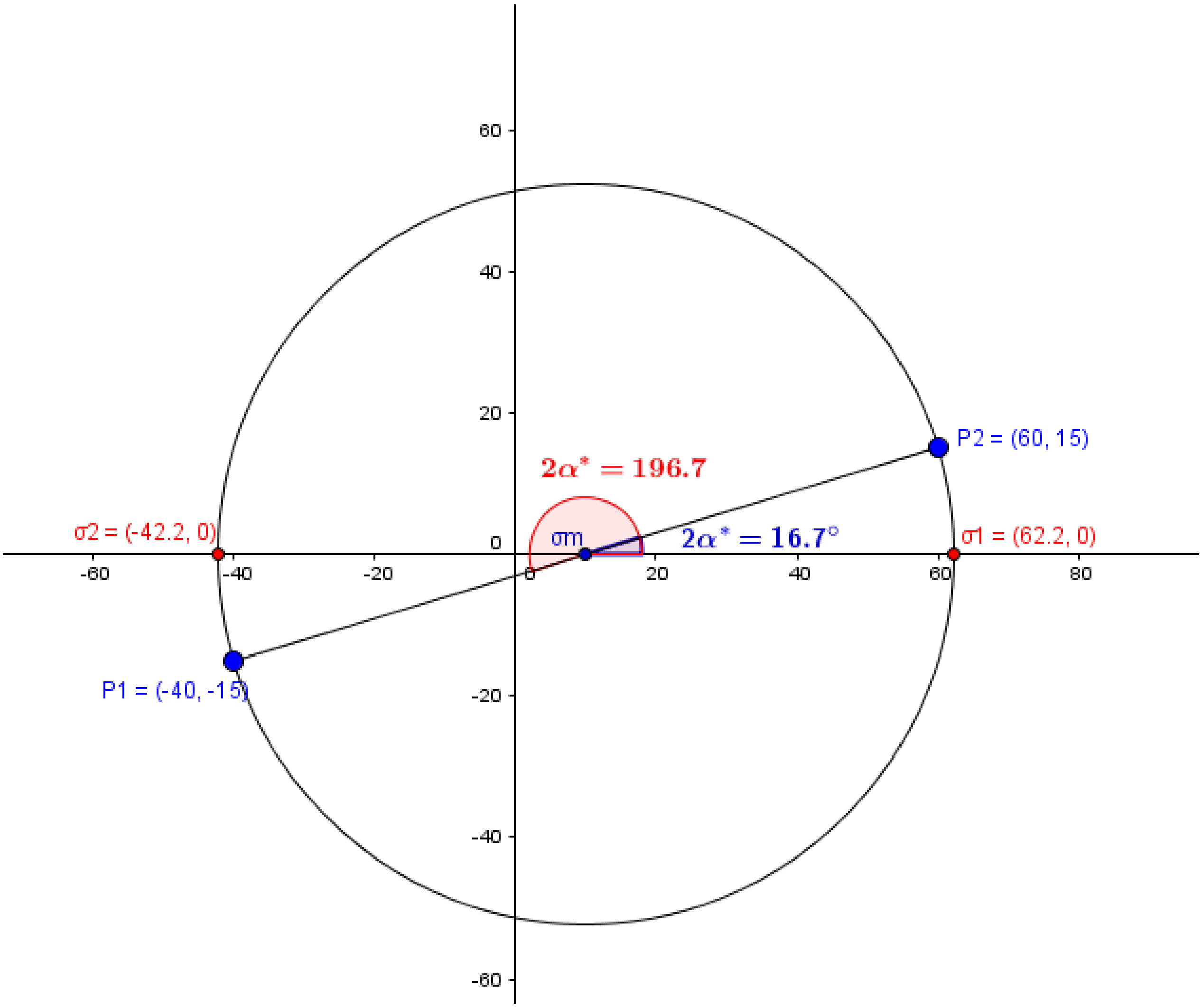
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{-40+60}{2} + \sqrt{\left(\frac{-40-60}{2}\right)^2 + (-15)^2} = 62{,}2$$

$$\sigma_2 = \frac{-40+60}{2} - \sqrt{\left(\frac{-40-60}{2}\right)^2 + (-15)^2} = -42{,}2$$

2) Bestimmung der Hauptrichtungen

Es soll der Winkel bestimmt werden, für welchen die Normalspannungen ihre Extremwerte annehmen (= Hauptrichtung). Dabei trägt man innerhalb des Mohrschen Spannungskreises den Winkel von links nach rechts ab. Der ermittelte Winkel steht dann für eine Linksdrehung des Koordinatensystems um diesen Winkel. Die Abtragung erfolgt von der Verbindungslinie zur σ-Achse:



Es existieren dabei zwei Winkel. Einmal von der Teilverbindungslinie zwischen P_1 und σ_m zur positiven x-Achse, und einmal von der Teilverbindungslinie zwischen P_2 und σ_m zur positiven x-Achse:

Winkel 1: 196,7° / 2 = 98,35°
Winkel 2: 16,7° / 2 = 8,35°

Rechnerische Probe:

$$\tan(2\alpha *) = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

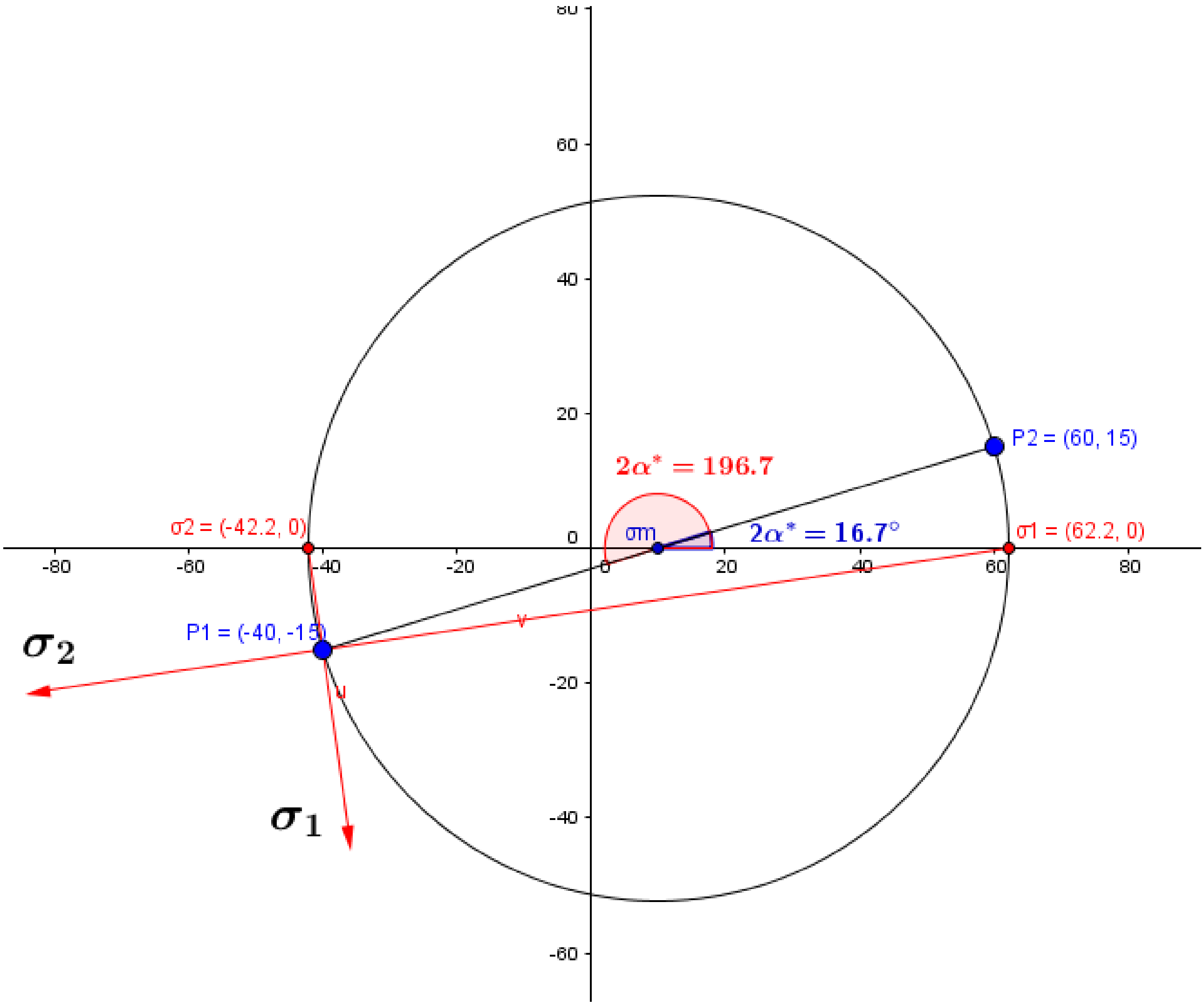
$$2\alpha^* = \tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot -15}{-40-60}\right) = 16{,}7°$$

$$\alpha^* = 8{,}35°$$

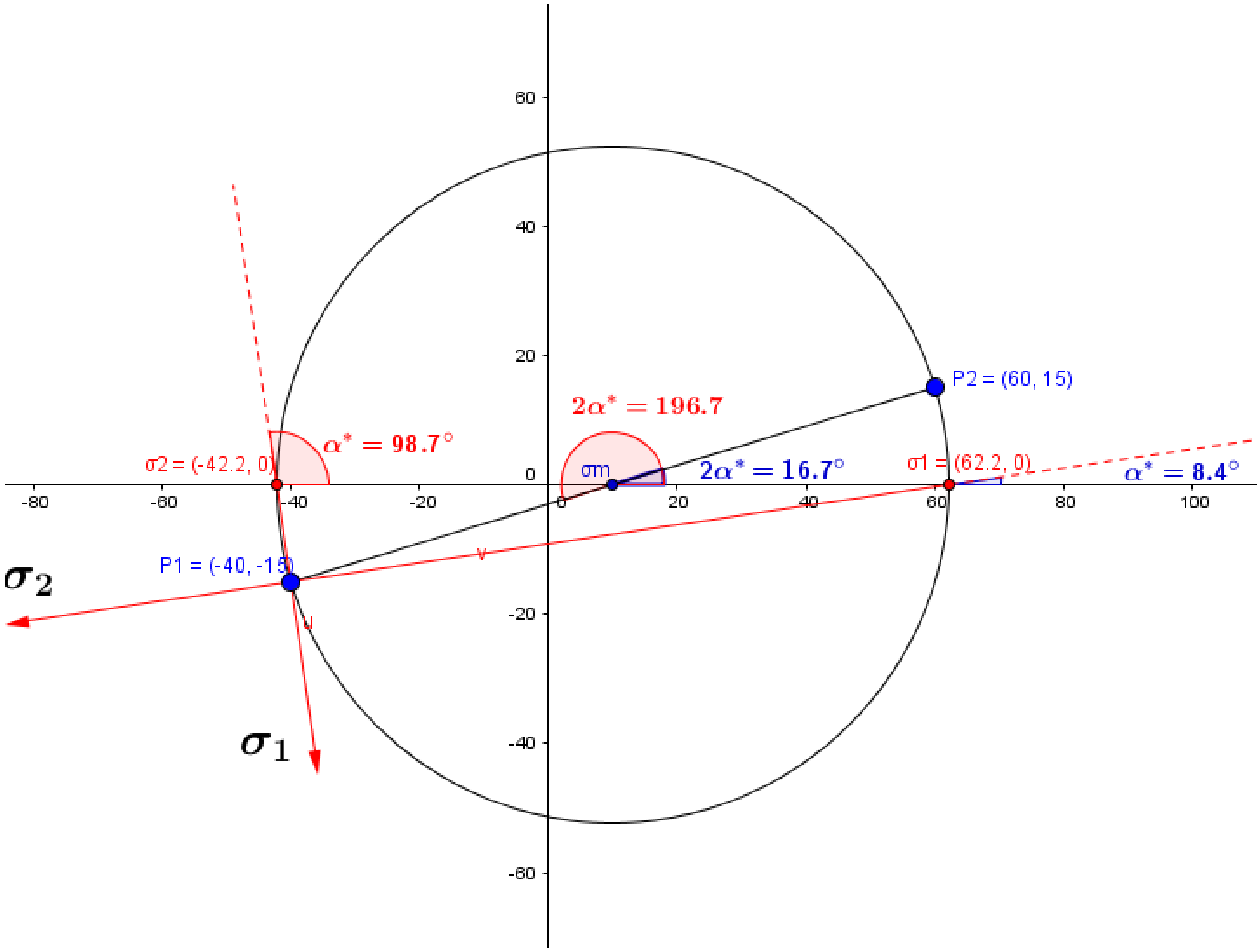
bzw.

$$\alpha^* = 8{,}35° + 90° = 98{,}35°$$

Ein Winkel ist für die Hauptnormalspannung σ_1 und einer für die Hauptnormalspannung σ_2. Die Hauptnormalspannung stehen senkrecht aufeinander, demnach liegt ein Unterschied von 90° vor. Welcher Winkel für welche Hauptnormalspannung steht, dass ergibt sich aus der Einzeichnung der Hauptrichtungen:



Die Winkelabtragung erfolgt immer von den Hauptrichtungen zur **positiven** σ-Achse. Dabei müssen diese gegebenfalls verlängert werden:



Es ist deutlich zu erkennen, dass der Winkel von 8,4° für die Hauptnormalspannung 2 und der Winkel von 98,7° für die Hauptnormalspannung 1 gilt. Bei dieser Abtragung wird nur der einfache Winkel berücksichtigt.

Probe:

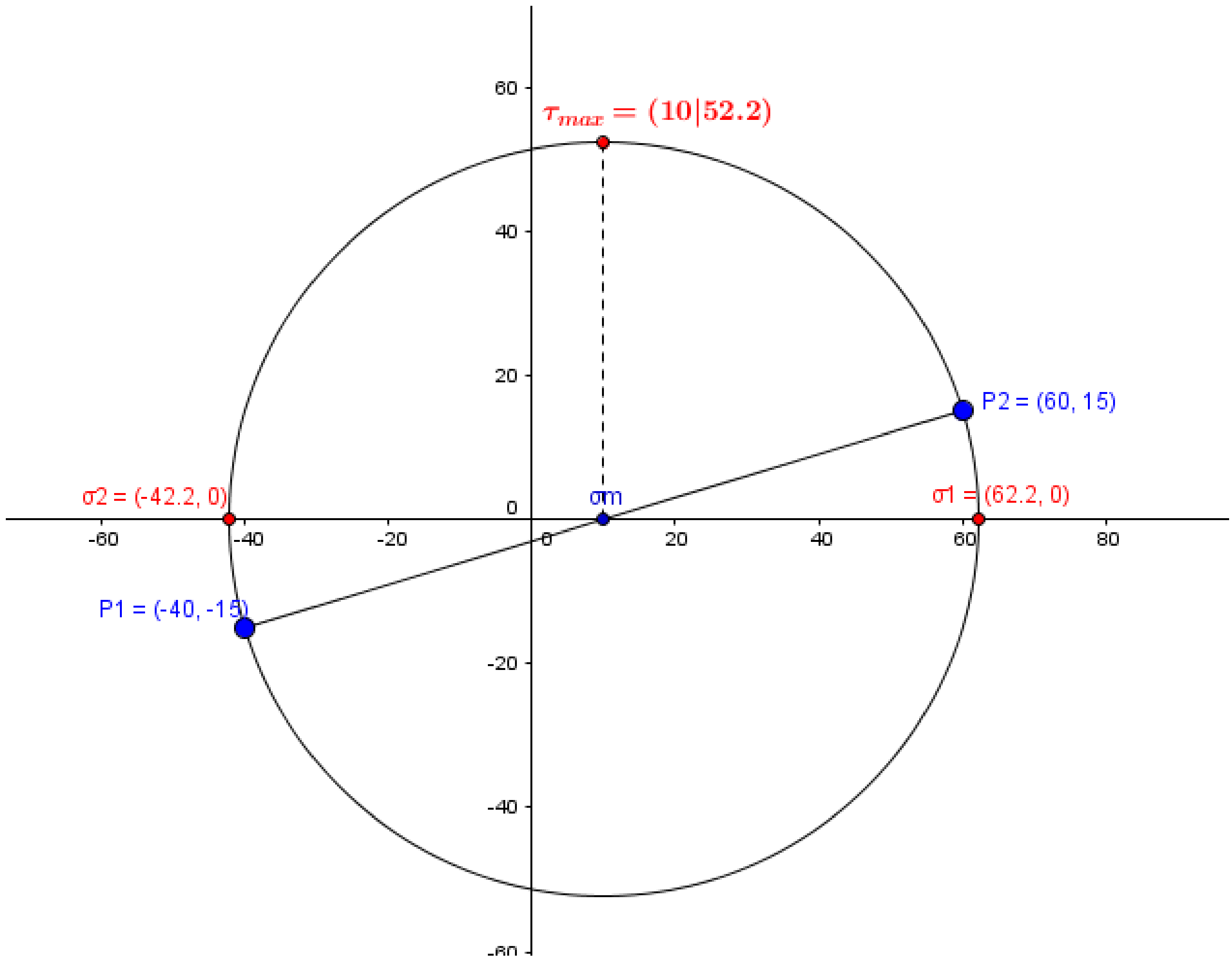
$$\sigma_x{*}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\alpha)+\tau_{xy}\sin(2\alpha)$$

$$\sigma_x{*}=\frac{-40+60}{2}+\frac{-40-60}{2}\cos(2\cdot 8{,}4°)-15\sin(2\cdot 8{,}4°)=-42{,}2\,MPa$$

Der Winkel von 8,4° gehört zur Hauptnormalspannung 2.

3) Bestimmung der Hauptschubspannungen

Die Hauptschubspannungen nehmen ihre Extremwerte bei der mittleren Normalspannung an:



Die Hauptschubspannung ergibt sich zu:

$\tau_{max} = (10|52{,}2)$

Rechnerische Probe:

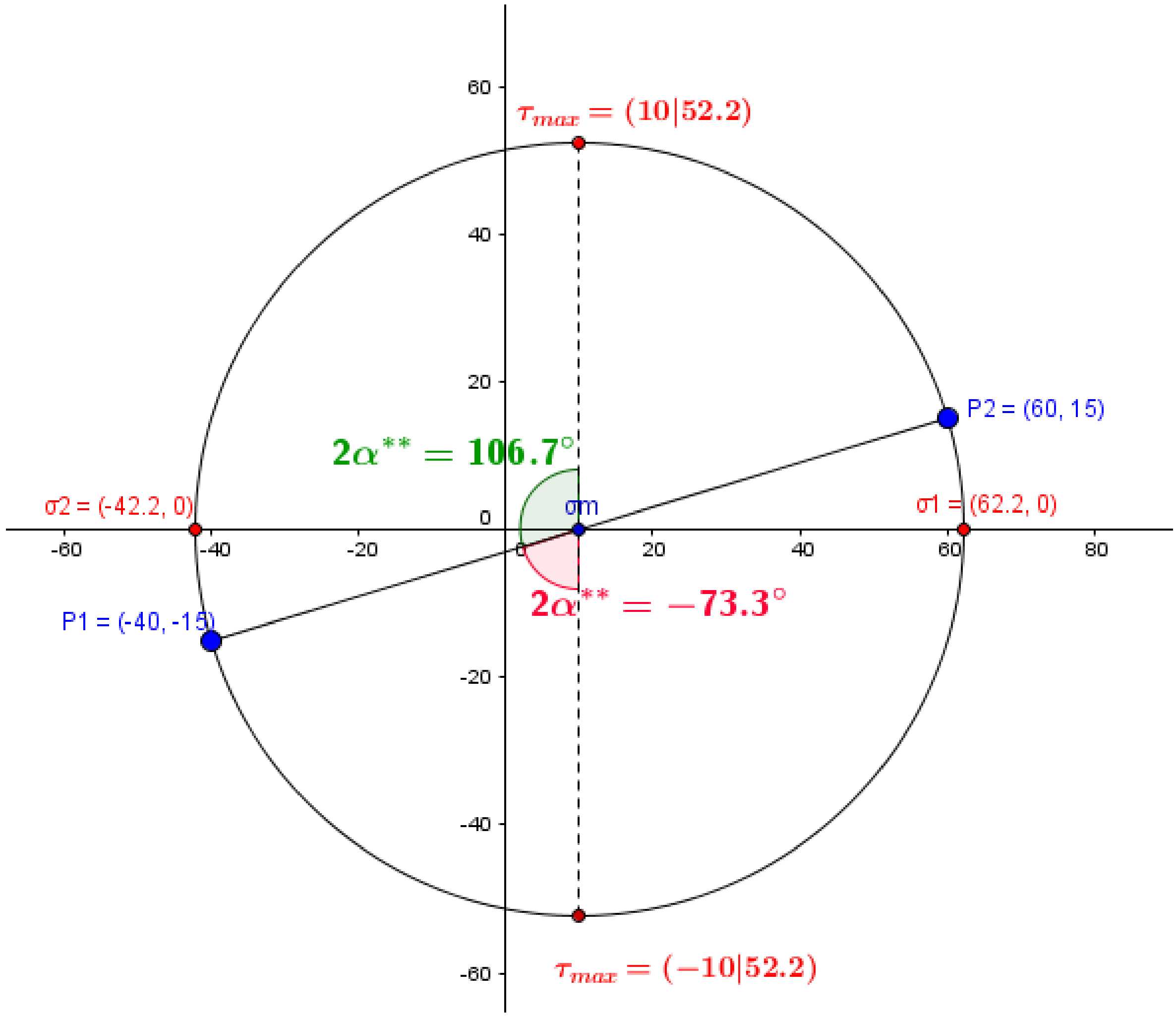
$$\tau_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_1 = +\sqrt{\left(\frac{-40-60}{2}\right)^2 + (-15)^2} = 52{,}2\,MPa$$

$$\tau_2 = -\sqrt{\left(\frac{-40-60}{2}\right)^2 + (-15)^2} = -52{,}2\,MPa$$

Die Normalspannung nimmt beim Auftreten der Hauptschubspannung ihren mittleren Wert an (σ_m = 10 MPa).

Als nächstes sollen die Hauptrichtungen bestimmt werden, für welche die beiden Hauptschubspannungen auftreten. Dabei muss wieder berücksichtigt werden, dass hier zweifache Winkel abgetragen werden.



Es sind zwei Winkel abgetragen worden. Zum einen für die positive Hauptschubspannung bei (10|52,2) und für die negative Hauptschubspannung bei (-10|52,2). Die Hauptrichtung α^{**} bei welcher die positive Hauptschubspannung auftritt, ergibt sich, indem von der Verbindungslinie P_1 und σ_m der Winkel zur oberen senkrechten Linie bei σ_m abgetragen wird: $2\alpha^{**} = 106{,}7° \rightarrow \alpha^{**} = 53{,}4°$.

Der Winkel, bei welchem die negative Hauptschubspannug auftritt bestimmt sich, indem von der Verbindungslinie P_1 und σ_m der Winkel zur unteren senkrechten Linie bei σ_m abgetragen wird: $2\alpha^{**} = 73{,}3° \rightarrow \alpha^{**} = -36{,}7°$. Dieser Winkel wird negativ, weil hier die Abtragung von rechts nach links erfolgt, also in einer Linksdrehung. Die Koordinatendrehung erfolgt dann in einer Rechtsdrehung, d.h. es muss ein negativer Winkel innerhalb der Formeln berücksichtigt werden.

Rechnerische Probe:

$$\tan(2\alpha^{**}) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\tan(2\alpha^{**}) = -\frac{-40-60}{2\cdot -15}$$

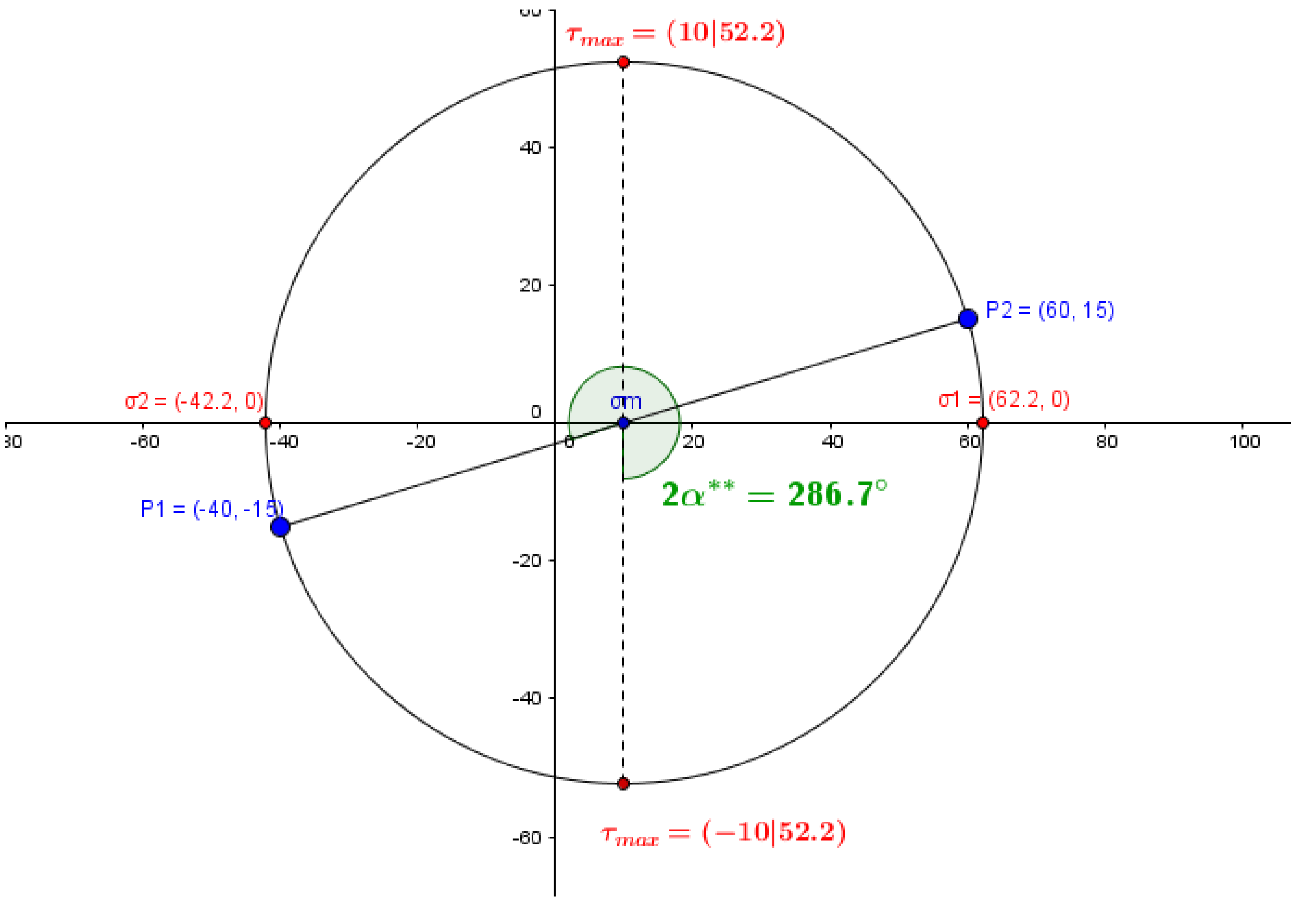
$$2\alpha^{**} = \tan^{-1}\left(-\frac{-40-60}{2\cdot -15}\right) = -73{,}3°$$

$$\alpha^{**} = -36{,}7°$$ negative Hauptschubspannung

bzw.

$$\alpha^{**} = -36{,}7° + 90° = 53{,}3°$$ positive Hauptschubspannung

Alternativ kann auch die Abtragung von links nach rechts (Rechtsdrehung im Mohrschen Spannungskreis, dafür Linksdrehung des Koordinatensystems) erfolgen: α** = 143,4° (=360° - 36,7°). Das bedeutet also, von der Verbindungslinie aus erfolgt die Abtragung bis zur unteren gestrichelten Linie in einer Rechtsdrehung:



Probe:

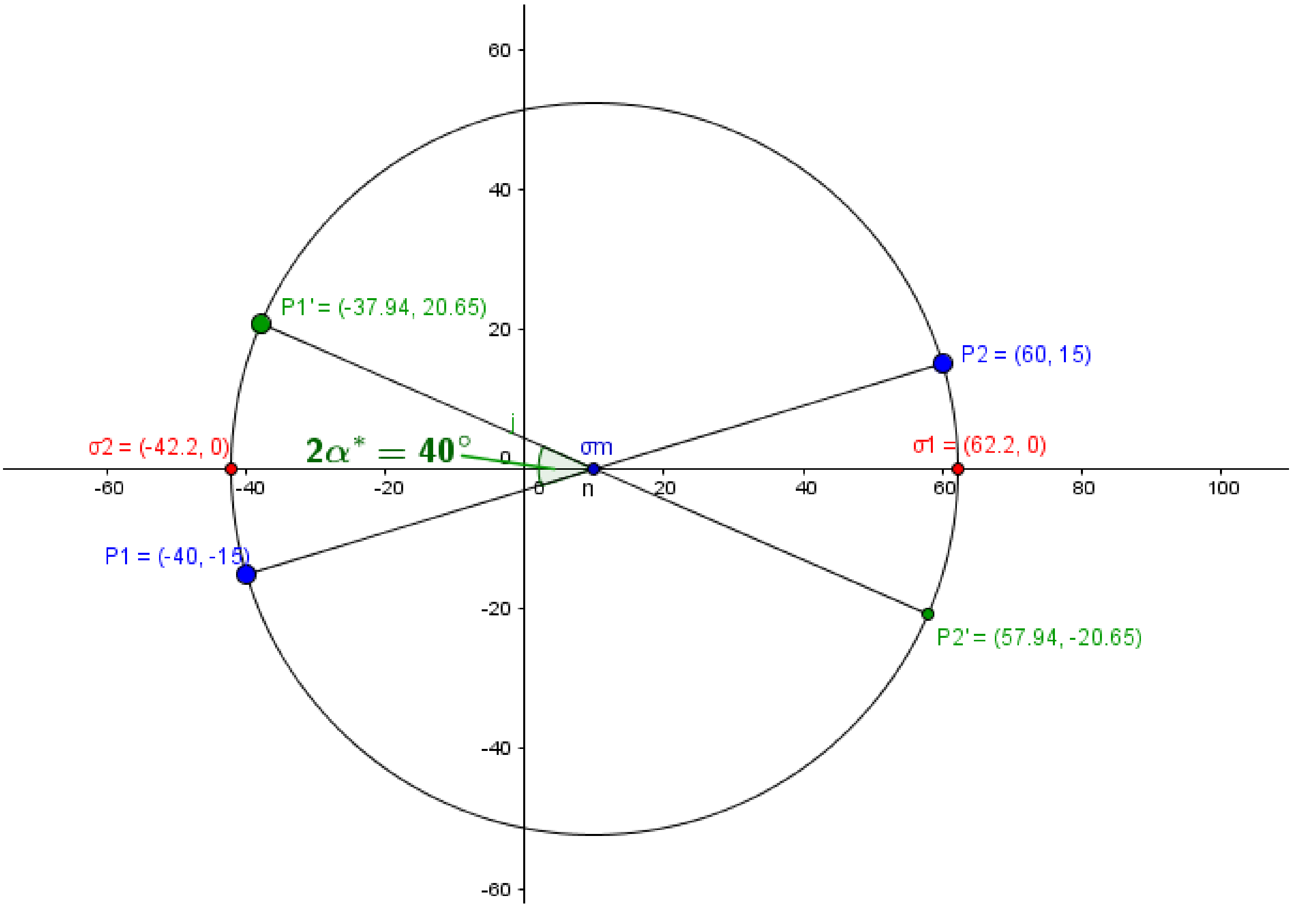
$$\tau_{xy}*=\tau_{yx}*=\frac{-\sigma_x+\sigma_y}{2}\sin(2\alpha)+\tau_{xy}\cos(2\alpha)$$

$$\tau_{xy}*=\tau_{yx}*=\frac{40+60}{2}\sin(2\cdot-36{,}7°)-15\cos(2\cdot-36{,}7°)=-52{,}2\,MPa$$

Der Winkel -36,7° (von Verbindungslinie zur unteren gestrichelten Linie) gehört also zur negativen Hauptschubspannung. Der positive Winkel von α** = 143,4° führt zum selben Ergebnis.

4. Bestimmung der Normalspannung und Schubspannung in einem Drehwinkel von 20° zur x-Achse.

Es muss nun der doppelte Winkel betrachtet werden und von der Teilverbindungslinie von P_1 und σ_m aus gesehen abgetragen werden:



Die Spannungszustand für eine Drehung des Ausgangskoordinatensystems um 20° gegen den Uhrzeigersinn (Linksdrehung = positiver Winkel) ergibt:

σ_x = -37,94 MPa, **σ_y = 57,94 MPa** und **τ_{xy} = 20,65 Mpa**.

Rechnerische Probe:

$$\sigma_x * = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \sin(2\alpha)$$

$$\sigma_x * = \frac{-40+60}{2} + \frac{-40-60}{2} \cos(2 \cdot 20°) - 15 \sin(2 \cdot 20°) = -37{,}94\, MPa$$

$$\sigma_y * = \frac{-40+60}{2} + \frac{40+60}{2} \cos(2 \cdot 20°) + 15 \sin(2 \cdot 20°) = 57{,}94\, MPa$$

$$\tau_{xy} * = \tau_{yx} * = \frac{40+60}{2} \sin(2 \cdot 20°) - 15 \cos(2 \cdot 20°) = 20{,}65\, MPa$$